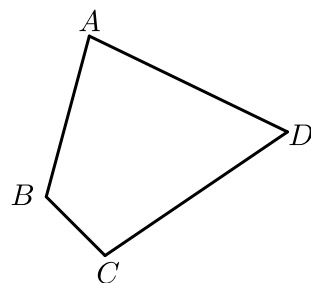


第2讲 旋转综合（练习）

一、旋转之对角互补模型

练习

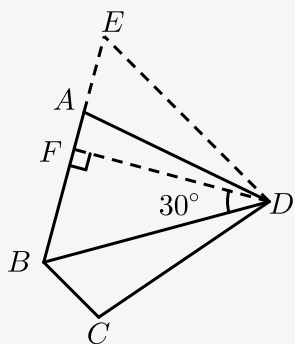
1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = CD$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ 。



【答案】 $\frac{81\sqrt{3}}{4}$

【解析】 $\because AD = CD$ ，

$\therefore$ 以点 D 为旋转中心，把 $\triangle BCD$ 旋转到 $\triangle EAD$ ，



$\therefore BE = BA + AE = 9$ ， $\angle BDE = 60^\circ$ ，

$BD = ED$ ，过点 D 作 $DF \perp BE$ 于点 F ，

$\therefore BF = \frac{1}{2}BE = \frac{9}{2}$ ， $\angle BDF = 30^\circ$ ，

$\tan 30^\circ = \frac{BF}{DF}$ ，

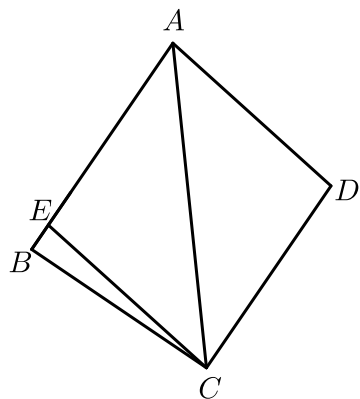
$\therefore DF = \frac{9}{2} \div \tan 30^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}BE \cdot DF = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$ 。

故答案为： $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ 。

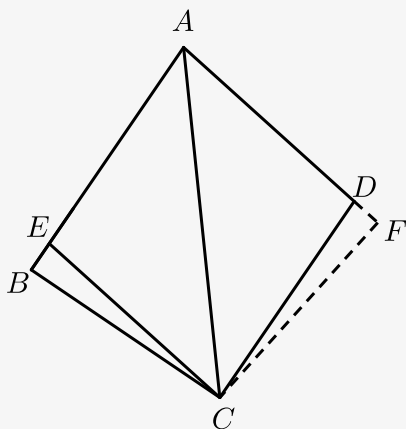
【标注】【知识点】对角互补模型

2. 如图，已知四边形 $ABCD$ 的对角互补，且 $\angle BAC = \angle DAC$ ， $AB = 15$ ， $AD = 12$ ．过顶点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，则 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】9

【解析】如图，过顶点 C 作 $CF \perp AD$ 于 F ，



又因为 $\angle BAC = \angle DAC$ ， $CE \perp AB$ ，所以 $\triangle ACE \cong \triangle ACF$ ，所以 $AE = AF$ ， $CE = CF$ ．

又 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，所以 $\angle CDF = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle EBC$ ，故 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ ，所以 $BE = DF$ ．

而 $AB = AE + BE$ ， $AD = AF - DF$ ，所以

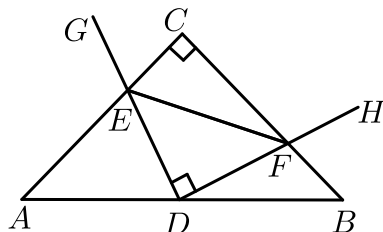
$$AB + AD = AE + AF + BE - DF = 2AE, \text{ 所以 } AE = \frac{1}{2}(AB + AD) = 13.5, \\ BE = AB - AE = 1.5, \text{ 所以 } \frac{AE}{BE} = \frac{13.5}{1.5} = 9.$$

故答案为：9．

【标注】【知识点】对角互补模型；全等三角形的对应边与角

练习

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D 为 AB 中点. $\angle GDH = 90^\circ$, $\angle GDH$ 绕点 D 旋转, DG, DH 分别与边 AC, BC 交于 E, F 两点. 下列结论: ① $AE + BF = AC$, ② $AE^2 + BF^2 = EF^2$, ③ $S_{\text{四边形}CEDF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, ④ $\triangle DEF$ 始终为等腰直角三角形. 其中正确的是().



A. ①②③④

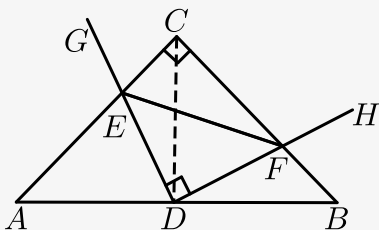
B. ①②③

C. ①④

D. ②③

【答案】A

【解析】连接 CD , 如图,



$\because AC = BC$, 点 D 为 AB 中点, $\angle GDH = 90^\circ$,

$\therefore CD = BD$, $\angle B = \angle DCA = 45^\circ$, $CD \perp AB$,

$\therefore \angle GDF = 90^\circ$, 即 $\angle CDE + \angle CDF = 90^\circ$,

而 $\angle CDF + \angle BDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE = \angle BDF$,

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle B \\ CD = BD \\ \angle CDE = \angle BDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BDF$ (ASA),

$\therefore CE = BF$, $DE = DF$,

$\therefore AE + BF = AE + CE = AC$, 故①正确;

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DEF$ 始终为等腰直角三角形, 故④正确;

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BDF$,

$\therefore S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BDF}$,

$\therefore S_{\text{四边形}CEDF} = S_{\triangle CED} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，故③

正确；

$\therefore CE = BF$ ， $AC = BC$ ，

$\therefore AE = CF$ ，

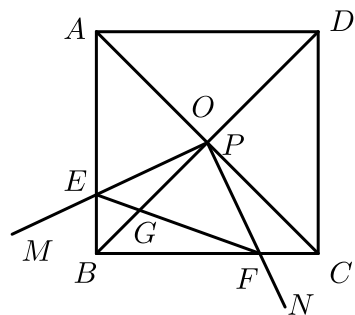
$\therefore CF^2 + CE^2 = EF^2$ ，

$\therefore AE^2 + BF^2 = EF^2$ ，故②正确。

故选：A。

【标注】【知识点】对角互补模型

4. 如图所示，边长为1的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O 。有直角 $\angle MPN$ ，使直角顶点 P 与点 O 重合，直角边 PM 、 PN 分别与 OA 、 OB 重合，然后逆时针旋转 $\angle MPN$ ，旋转角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)， PM 、 PN 分别交 AB 、 BC 于 E 、 F 两点，连接 EF 交 OB 于点 G ，有下列结论：
① $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ ；② $EF = \sqrt{2}OE$ ；④ $S_{\text{四边形}BEOF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4$ ；④
 $BE + BF = \sqrt{2}OA$ ；其中正确的个数是（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore OB = OC$ ， $\angle OBE = \angle OCF = 45^\circ$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EOF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOF + \angle BOE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOE = \angle COF$ ，

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle COF \\ OB = OC \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF$ (ASA)，故①正确；

$$\textcircled{2} \because OE = OF, BE = CF,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2}OE, \text{ 故 } \textcircled{2} \text{ 正确};$$

$$\textcircled{3} \because S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle BOF}$$

$$= S_{\triangle BOF} + S_{\triangle COF}$$

$$= S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4, \text{ 故 } \textcircled{3} \text{ 正确};$$

$$\textcircled{4} \because BE + BF = BF + CF = BC = \sqrt{2}OA, \text{ 故 } \textcircled{4} \text{ 正确};$$

所以正确项为①②③④.

故选D.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

练习

5. 在四边形ABCD中，对角线AC平分 $\angle DAB$.

(1) 如图1，当 $\angle DAB = 120^\circ$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ 时，发现： $AB + AD$ _____ AC (填写“<”，“=”，“>”).

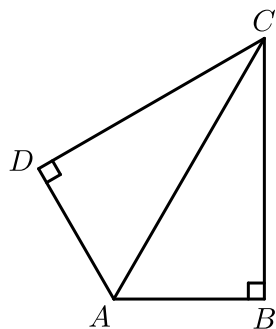


图1

(2) 如图2，当 $\angle DAB = 120^\circ$ ， $\angle B$ 和 $\angle D$ 互补时，线段AB、AD、AC在(1)式中的数量关系是否还成立，写出你的猜想，并给予证明.

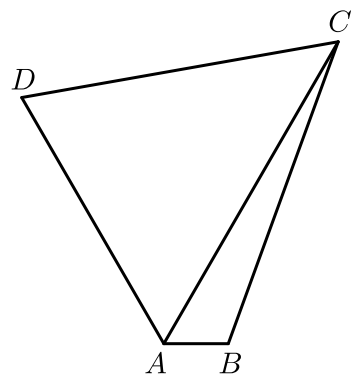


图2

(3) 如图3 , 当 $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle B$ 和 $\angle D$ 互补 , $AB = 3$, $AD = 1$ 时 , $AC = \underline{\hspace{1cm}}$.

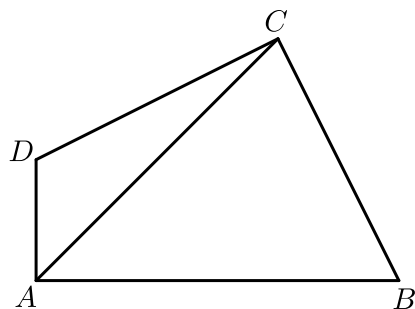


图3

【答案】 (1) =

(2) 成立 , 证明见解析 .

(3) $2\sqrt{2}$

【解析】 (1) $\because AC$ 平分 $\angle DAB$, $\angle DAB = 120^\circ$,

$$\therefore \angle CAB = \angle CAD = 60^\circ ,$$

$$\because \angle B = \angle D = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD = 30^\circ ,$$

$$\therefore AB = AD = \frac{1}{2}AC ,$$

$$\therefore AB + AD = AC .$$

(2) 成立 , $AB + AD = AC$, 证明 :

过点 C 作 $CE \perp AD$, $CF \perp AB$ 于点 E 、 F .

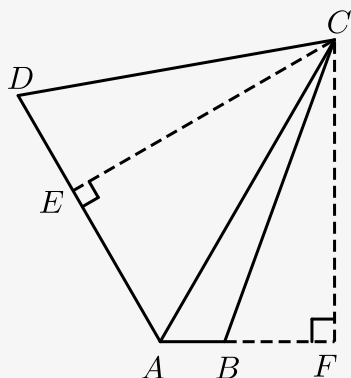


图2

$\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore CE = CF$,

$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle CBF = 180^\circ$,

$\therefore \angle CBF = \angle D$,

$\because \angle CED = \angle CFB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CED \cong \triangle CFB$,

$\therefore ED = BF$,

$\therefore AD + AB = AE + ED + AB = AE + BF + AB = AE + AF$,

$\because \angle DAB = 120^\circ$, $\angle CEA = \angle CFA = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECF = 60^\circ$.

$\therefore \angle EAC = \angle FAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle ECA = \angle FCA = 30^\circ$,

$\therefore AE = AF = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore AE + AF = AC$,

$\therefore AB + AD = AC$.

(3) 过点 C 作 $CE \perp AD$, $CF \perp AB$ 于点 E 、 F .

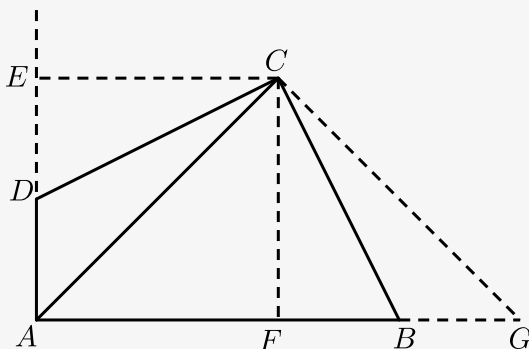


图3

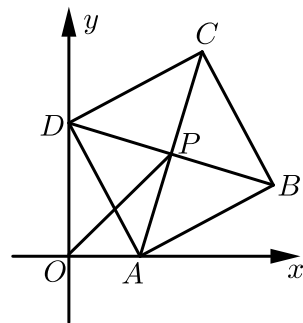
$\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore CE = CF$,

$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\angle ADC + \angle EDC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = \angle EDC$,
 $\because \angle CED = \angle CFB = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle CFB \cong \triangle CED$,
 $\therefore CB = CD$.
 延长 AB 至 G , 使 $BG = AD$, 连接 CG .
 $\because \angle ABC + \angle CBG = 180^\circ$,
 $\therefore \angle CBG = \angle ADC$,
 $\therefore \triangle GBC \cong \triangle ADC$,
 $\therefore \angle G = \angle DAC = \angle CAB = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACG = 90^\circ$,
 $\therefore AG = \sqrt{2}AC$,
 $\because AB + BG = AG$,
 $\therefore AB + AD = \sqrt{2}AC$,
 $\because AB = 3, AD = 1$,
 $\therefore AC = 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】对角互补模型

6. 已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A, D 都不与原点重合），顶点 B, C 都在第一象限，且对角线 AC, BD 相交于点 P ，连接 OP 。



- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^\circ$.
 (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$.
 (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A, D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____ .

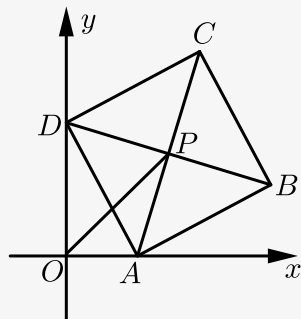
【答案】(1) $(0, 2\sqrt{2})$; 45

(2) 证明见解析 .

(3) $2 < d \leq 2\sqrt{2}$

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,

$\therefore \triangle ADP$ 是等腰直角三角形 ,



又 $\because OA = OD$,

$\therefore \triangle AOD$ 是等腰直角三角形 ,

$\therefore$ 四边形 $AODP$ 是正方形 ,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4 ,

$\therefore AC = BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore AP = DP = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, 2\sqrt{2})$, $\angle POA = 45^\circ$.

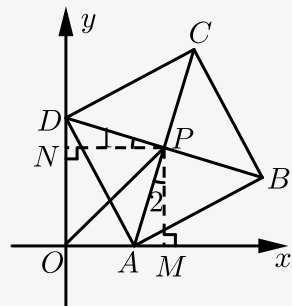
(2) 如图 , 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , $PN \perp y$ 轴于点 N ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore PD = PA$, $\angle DPA = 90^\circ$,

$\because PM \perp x$ 轴于点 M , $PN \perp y$ 轴于点 N ,

$\therefore \angle PMO = \angle PNO = \angle PND = 90^\circ$,



$\therefore \angle NOM = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $NOMP$ 中 , $\angle NPM = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPA = \angle NPM$,

$\therefore \angle 1 = \angle DPA - \angle NPA$, $\angle 2 = \angle NPM - \angle NPA$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$$\therefore \text{在} \triangle DPN \text{和} \triangle APM \text{中}, \begin{cases} \angle PND = \angle PMA \\ \angle 1 = \angle 2 \\ PD = PA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DPN \cong \triangle APM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PN = PM,$$

$$\therefore OP \text{ 平分 } \angle DOA.$$

(3) 当 A, O 重合时, 点 P 到 y 轴的距离最小,

$$d = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\text{当 } OA = OD \text{ 时, 点 } P \text{ 到 } y \text{ 轴的距离最大, } d = PD = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } A, D \text{ 都不与原点重合,}$$

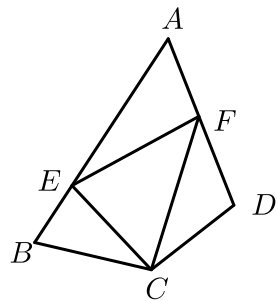
$$\therefore 2 < d \leq 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

二、旋转之角含半角模型

练习

7. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $BC = CD$, $\angle BCD = 120^\circ$, E, F 分别为 AB, AD 上的点, $\angle ECF = \angle A = 60^\circ$.



- (1) 求证: $EF = BE + DF$.
 (2) 求证: 点 C 在 $\angle BAD$ 的平分线上.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

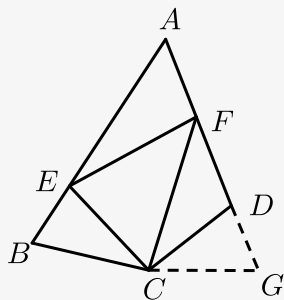
【解析】 (1) 延长 FD 至 G , 使 $DG = BE$, 连接 CG .

$$\therefore \angle A + \angle BCD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

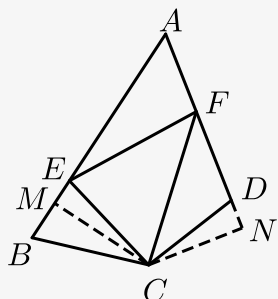
$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle CDG = \angle B,$$

$\therefore \triangle CBE \cong \triangle CDG (\text{SAS})$.
 $\therefore CG = CE$, $\angle DCG = \angle BCE$,
 $\therefore \angle ECG = \angle BCD = 120^\circ = 2\angle ECF$,
 $\therefore \angle ECF = \angle GCF$,
 $\therefore \triangle ECF \cong \triangle GCF (\text{SAS})$.
 $\therefore EF = GF = DG + DF = BE + DF$.



(2) 如图所示过点C作 $CM \perp AB$ 于点M , $CN \perp AD$ 于点N ,



$\because \angle BCD = 120^\circ$, $\angle A = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCD + \angle A = 180^\circ$,
 $\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\because \angle CDN + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle B = \angle CDN$,
 在 $\triangle BCM$ 和 $\triangle DCN$ 中 ,
 $\because \angle B = \angle CDN$,
 $\angle CMB = \angle CND = 90^\circ$, $BC = CD$,
 $\therefore \triangle BCM \cong \triangle DCN$,
 $\therefore CM = CN$,
 $\therefore$ 点C在 $\angle BAD$ 的平分线上 .
 (或利用 CE 平分 $\angle BEF$, CF 平分 $\angle EFD$ 说明也可)

【标注】【知识点】半角模型

8. 阅读下面的材料 :

- (1) 如图①, 在等边三角形 ABC 内, 点 P 到顶点 A, B, C 的距离分别是3、4、5, 则 $\angle APB =$ _____ $^\circ$. 由于 PA, PB, PC 不在同一三角形中, 为了解决本题, 我们可以将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 到 $\triangle ACP'$ 处, 连接 PP' , 此时, $\triangle ACP' \cong$ _____ 就可以利用全等的知识, 进而将三条线段的长度转化到一个三角形中, 从而求出 $\angle APB$ 的度数.

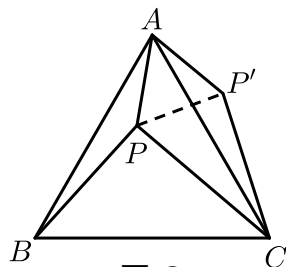


图 ①

- (2) 请你利用第(1)题的解答方法解答: 如图②, $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AB = AC$, D, E 为 BC 上的点, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 求证: $BD^2 + EC^2 = DE^2$.

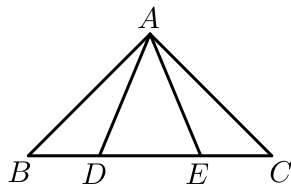


图 ②

- (3) 如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 120^\circ$, $AB = AC$, $\angle EAD = 60^\circ$, $BC = 3 + \sqrt{3}$. 若以 BD, DE, EC 为边的三角形是直角三角形时, 求 BE 的长.

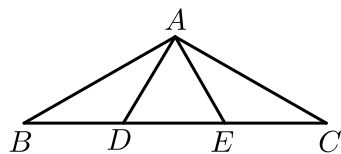


图 ③

【答案】 (1) 150° ; $\triangle ABP$

(2) 证明见解析.

(3) $1 + \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because \triangle ABP$ 旋转到 $\triangle ACP'$ 的位置,

$$\therefore \triangle ACP' \cong \triangle ABP,$$

$$\therefore AP = 3, BP = 4, CP = 5, \angle BAP = \angle CAP',$$

$$\therefore AP' = 3, PC' = BP = 4, \angle BAC = \angle PAP' = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle PAP'$ 为等边三角形,

$$\therefore AP = PP' = 3,$$

$\therefore$ 由勾股定理逆定理得,

$$PP'^2 + P'C^2 = PC^2 ,$$

$$\therefore \angle PP'C = 90^\circ ,$$

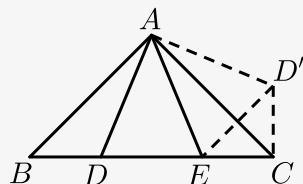
$$\therefore \angle AP'P = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle AP'C = 150^\circ ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AP'C ,$$

$$\therefore \angle APB = 150^\circ .$$

(2) 如图所示, 把 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 到 $\triangle ACD'$ 处, 连接 $D'E$,



$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD' ,$$

$$\therefore AD = AD' , BD = CD' , \angle ABD = \angle ACD' ,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ , \angle CAB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EAC = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle CAD' = \angle EAD' = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle D'AE ,$$

$$\therefore \text{在} \triangle DAE \text{和} \triangle D'AE \text{中} ,$$

$$\begin{cases} AD = AD' \\ \angle DAE = \angle D'AE , \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle D'AE (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore DE = D'E ,$$

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ , AB = AC ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ ,$$

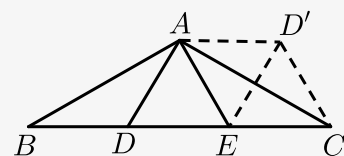
$$\therefore \angle D'CE = \angle ACD' + \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \text{在} \text{Rt} \triangle D'EC \text{中} , \text{由勾股定理得} ,$$

$$D'E^2 = D'C^2 + CE^2 ,$$

$$\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2 .$$

(3) 把 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 120° 到 $\triangle ACD'$ 处, 连接 $D'E$,



$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD' ,$$

$$\therefore AB = AC , AD = AD' , BD = CD' , \angle ABD = \angle ACD' ,$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle DAE = 60^\circ, \angle BAC = 120^\circ, \\
&\therefore \angle BAD + \angle EAC = 60^\circ, \\
&\therefore \angle EAC + \angle CAD' = \angle EAD' = 60^\circ, \\
&\therefore \text{在} \triangle DAE \text{和} \triangle D'AE \text{中}, \\
&\quad \begin{cases} DA = D'A \\ \angle DAE = \angle D'AE, \\ AE = AE \end{cases} \\
&\therefore \triangle DAE \cong \triangle D'AE (\text{SAS}), \\
&\therefore DE = D'E, \\
&\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ, \\
&\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \\
&\therefore \text{以} BD, DE, EC \text{为边的三角形为直角三角形}, \\
&\therefore \text{以} CD', D'E, CE \text{为边的三角形为直角三角形}, \\
&\therefore \angle D'CE = 60^\circ, \\
&\therefore \angle CD'E = 90^\circ \text{或} \angle CED' = 90^\circ, \\
&\textcircled{1} \text{若} \angle CD'E = 90^\circ, \\
&\therefore \angle D'EC = 30^\circ, D'E^2 + CD'^2 = CE^2, \\
&\therefore CD' = \frac{1}{2}CE, D'E = \sqrt{3}CD', \\
&\therefore BD^2 + DE^2 = CE^2, \\
&\text{设} BD \text{的长为} x, \\
&\therefore CD' = BD = x, \\
&\therefore CE = 2x, D'E = DE = \sqrt{3}x, \\
&\therefore BC = BD + DE + CE, \\
&\therefore BC = x + \sqrt{3}x + 2x \\
&\quad = (3 + \sqrt{3})x, \\
&\therefore BC = 3 + \sqrt{3}, \\
&\therefore (3 + \sqrt{3})x = 3 + \sqrt{3} \\
&\therefore x = 1, \\
&\therefore BE = BD + DE, \\
&\therefore BE = 1 + \sqrt{3}, \\
&\textcircled{2} \text{若} \angle D'EC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle ED'C = 30^\circ, \\
&\text{由勾股定理得} D'E^2 + EC^2 = CD'^2, \\
&\therefore D'E = \sqrt{3}CE, D'C = 2CE,
\end{aligned}$$

设 CE 的长为 a ，则

$$CD' = BD = 2CE = 2a, D'E = DE = \sqrt{3}CE = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore BC = BD + DE + CE$$

$$= 2a + \sqrt{3}a + a$$

$$= (3 + \sqrt{3})a,$$

$$BC = 3 + \sqrt{3},$$

$$\therefore (3 + \sqrt{3})a = 3 + \sqrt{3},$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore BE = BD + DE$$

$$= 2a + \sqrt{3}a,$$

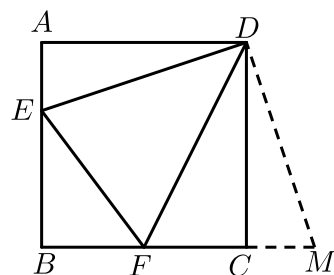
$$\therefore BE = 2 + \sqrt{3},$$

综上所述， BE 的长为 $1 + \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】半角模型

练习

9. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3， E ， F 分别是 AB ， BC 边上的点，且 $\angle EDF = 45^\circ$ 。将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DCM$ 。若 $AE = 1$ ，则 FM 的长为_____。



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because \triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$ ，

$$\therefore \angle FCM = \angle FCD + \angle DCM = 180^\circ,$$

$\therefore F$ 、 C 、 M 三点共线，

$$\therefore DE = DM, \angle EDM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF + \angle FDM = 90^\circ.$$

$$\because \angle EDF = 45^\circ,$$

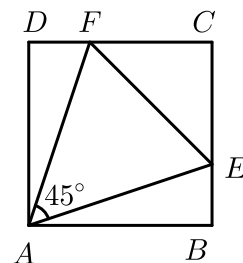
$$\therefore \angle FDM = \angle EDF = 45^\circ.$$

又 $\because DF$ 为公共边，

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF, \\
&\therefore EF = MF. \\
&\text{设 } EF = MF = x, \\
&\therefore AE = CM = 1, \text{ 且 } BC = 3, \\
&\therefore BM = BC + CM = 3 + 1 = 4, \\
&\therefore BF = BM - MF = BM - EF = 4 - x, \\
&\therefore EB = AB - AE = 3 - 1 = 2. \\
&\text{在 Rt}\triangle EBF \text{ 中, } EB^2 + BF^2 = EF^2, \\
&\text{即 } 2^2 + (4 - x)^2 = x^2, \\
&\text{解得 } x = \frac{5}{2}, \\
&\therefore FM = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

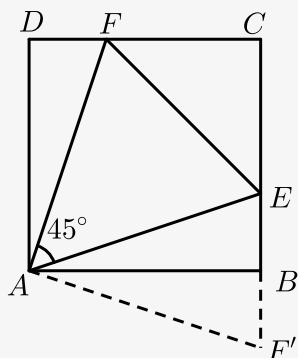
10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为 4，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____。



【答案】2

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $\therefore AD = AB$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ 。

如图，将 $\triangle DAF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 到 $\triangle BAF'$ 的位置，



由题意可得出： $\triangle DAF \cong \triangle BAF'$ ，

$\therefore DF = BF'$ ， $\angle DAF = \angle BAF'$ ，

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF' + \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EAF' = 45^\circ,$$

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle F'AE$ 中,

$$\begin{cases} AF = AF' \\ \angle FAE = \angle F'AE \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle F'AE (\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = EF',$$

$$\therefore \triangle ECF \text{ 的周长为 } 4,$$

$\therefore$

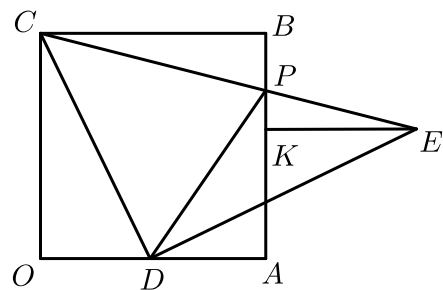
$$EF + EC + FC = FC + CE + EF' = FC + BC + BF' = FC + DF + BC = 2BC = 4$$

,

$$\therefore BC = 2, \text{ 即正方形 } ABCD \text{ 的边长为 } 2.$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

11. 如图, 四边形 $OABC$ 为正方形, 在 OA 边上有一点 D , 以 CD 为直角边构造等腰 $\text{Rt}\triangle CDE$, CE 交 AB 于点 P , 过点 E 作 AB 垂线交 AB 于 K , 若 $BP = 4$, $PD = 10$ 且 $OC + EK = 18$, 则 PK 的长度为 _____.



【答案】 2

【解析】 在 AO 延长线上截取 $OH = BP = 4$,

并连接 CH , 过 E 作 DA 延长线的垂线交于点 Q , 则 $\triangle COH \cong \triangle CBP (\text{SAS})$,

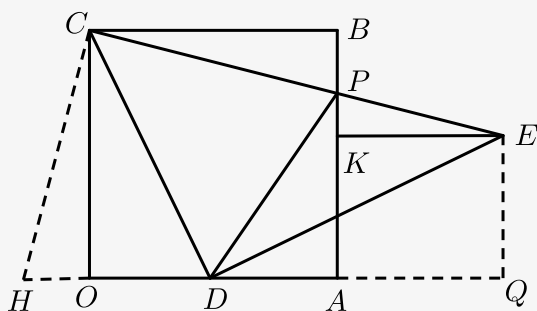
$$\therefore CH = CP \text{ 且 } \angle HCO = \angle PCB,$$

$$\therefore \angle HCP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HCD = \angle DCP = 45^\circ,$$

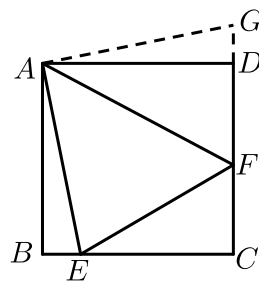
$\therefore \triangle HCD \cong \triangle PCD (\text{SAS})$, $\therefore DH = DP = 10$,
 $\therefore OD = 6$,
 又 $\because \triangle CDO \cong \triangle DEQ$,
 $\therefore DQ = CO$ 且 $EQ = OD = 6$,
 又 $\because OA = CO$,
 $\therefore AQ = OD = 6$,
 $\therefore KE = 6$,
 $\therefore OC = 12$,
 $\therefore DA = 6$,
 $\therefore AP = 8$,
 $\therefore PK = 8 - 6 = 2$.



【标注】【知识点】辅助线综合运用；正方形中的半角模型

12. 问题：如图(1)，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，试判断 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系。

(1) 小聪把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，从而发现 $EF = BE + FD$ ，请你利用图(1)证明上述结论。



图(1)

(2) 如图(2)，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 时，证明： $EF = BE + FD$ 。

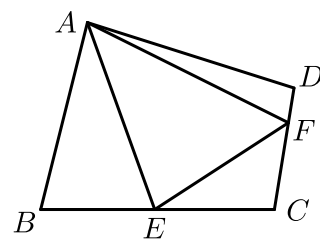


图 (2)

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 如图(1), $\because \triangle ADG \cong \triangle ABE$,

$$\therefore AG = AE , \angle DAG = \angle BAE , DG = BE ,$$

$$\text{又} \because \angle EAF = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle BEA = \angle EAF = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle FAE ,$$

在 $\triangle GAF$ 和 $\triangle FAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAF = \angle FAE , \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFE (\text{SAS}) .$$

$$\therefore GF = EF .$$

$$\text{又} \because DG = BE ,$$

$$\therefore GF = BE + DF ,$$

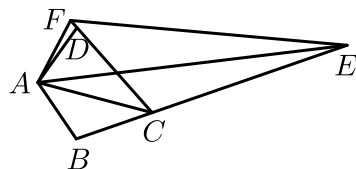
$$\therefore BE + DF = EF .$$

(2) 方法同(1) .

【标注】【知识点】半角模型

练习

13. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点, $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 若 $DF = 1$, $BE = 5$, 则线段 EF 的长为 () .



A. 3

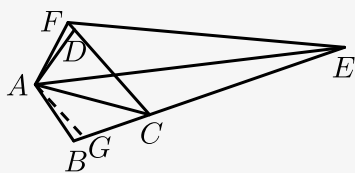
B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】



如图，在 BE 上截取 $BG = DF$ ，可证 $\triangle ADF \cong \triangle ABG$ ，再证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$ ，
 $\therefore EF = EG = BE - BG = BE - DF = 4$ 。

故选B。

【标注】【知识点】多边形中的半角模型

14. 四边形 $ADBC$ 是由等边 $\triangle ABC$ 和顶角为 120° 的等腰 $\triangle ABD$ 拼成，将一个 60° 角顶点放在 D 处，将该 60° 角绕 D 点旋转，该 60° 角两边分别交直线 BC 、 AC 于 M 、 N 。

(1) 当 M 、 N 分别在线段 BC 和线段 AC 上时（如图1），判断线段 BM 、 AN 、 MN 之间的数量关系，并证明你的结论。

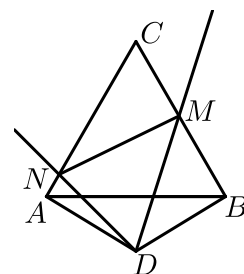


图 1

(2) 当 M 、 N 分别在线段 BC 和线段 CA 的延长线上时（如图2），直接写出线段 BM 、 AN 、 MN 之间的数量关系，并证明你的结论。

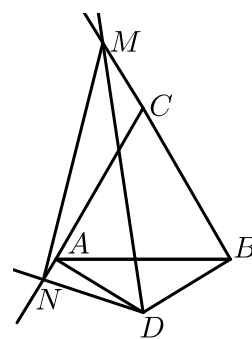
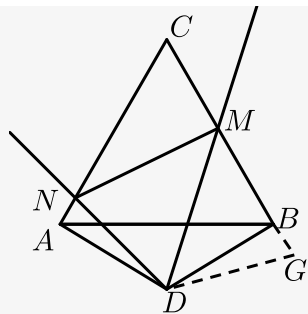


图 2

【答案】(1) $BM + AN = MN$ ，证明见解析。

(2) $BM - AN = MN$ ，证明见解析。

【解析】(1)



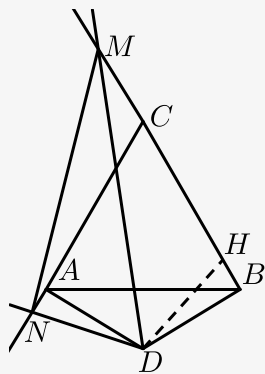
延长 MB 至 G ，使 $BG = AN$ ，则 $\triangle DBG \cong \triangle DAN$ (SAS)，

$\triangle MDG \cong \triangle MDN$ (SAS)，

$\therefore MN = MG$ ，

$\therefore BM + AN = MN$ 。

(2)



在 BM 上截取 $BH = AN$ ，则 $\triangle DBH \cong \triangle MAN$ (SAS)，

$\triangle MDH \cong \triangle MDN$ (SAS)，

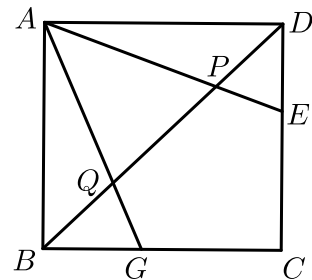
$\therefore MH = MN$ ， $MB - BH = MN$ ，

$\therefore MB - AN = MN$ 。

【标注】【知识点】半角模型

练习

15. 如图，点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q ，若 $\angle EAG = 45^\circ$ ， $BQ = 4$ ， $PD = 3$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____。



【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】如图，延长 CB 到 F ，使 $BF = DE$ ，连接 AF ，在 AF 上取 $AH = AP$ ，连接 HQ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$ ， $\angle BAD = \angle ADE = \angle ABF = 90^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 和 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABF = \angle ADE \\ BF = DE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ 。

$\therefore \angle GAF = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 = \angle BAD - \angle EAG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAG$

，

$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle HAQ (\text{SAS})$ ， $\triangle DAP \cong \triangle BAH (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 6 = \angle 4 = 45^\circ$ ， $BH = PD = 3$ ，

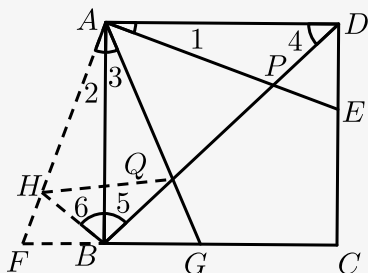
$\therefore \angle QBH = \angle 6 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ$ ，

$\therefore BH^2 + BQ^2 = 3^2 + 4^2 = HQ^2 = PQ^2$ ，

$\therefore PQ = HQ = 5$ ，

$\therefore BD = 12$ ，

$\therefore AD = AB = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = 6\sqrt{2}$ 。



【标注】【知识点】直接用勾股求边长；正方形中的半角模型

16. 通过类比联想，引申拓展研究典型题目，可达到解一类题的目的，下面是一个案例，请补充完整。

原题：如图1，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系。

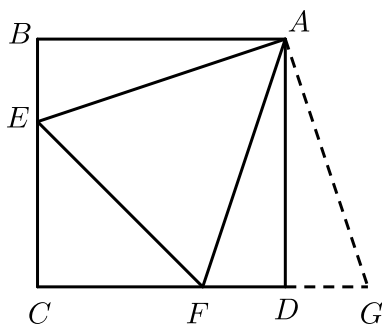


图 1

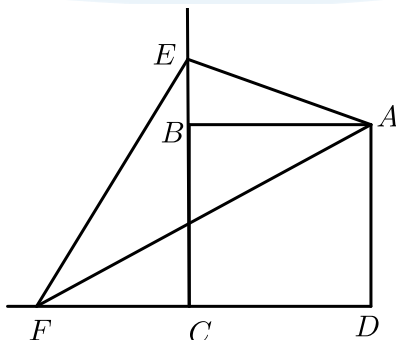


图 2

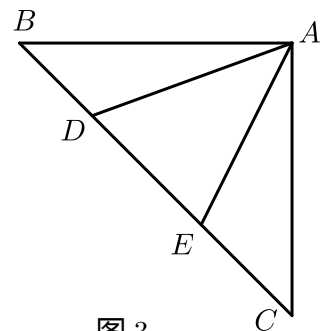


图 3

(1) 思路梳理

把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，可使 AB 与 AD 重合，由 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$ ，得 $\angle FDG = 180^\circ$ ，即点 F 、 D 、 G 共线，易证 $\triangle AFG$ _____，故 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____。

(2) 类比引申

如图2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____，并给出证明。

(3) 联想拓展

如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 、 E 均在边 BC 上，且 $\angle BAD + \angle EAC = 45^\circ$ ，若 $BD = 3$ ， $EC = 6$ ，求 DE 的长。

【答案】 (1) $\cong \triangle AFE$ ； $EF = BE + DF$

(2) $EF = DF - BE$

(3) $3\sqrt{5}$ 。

【解析】 (1) $\triangle AFG \cong \triangle AFE$ ， $EF = BE + DF$ 。

(2) $EF = DF - BE$ 。

如图，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，使 AB 与 AD 重合， E 点落在 T 点处，

由旋转知， $\angle EAB = \angle TAD$ ， $\angle EAT = 90^\circ$ ，

$EB = TD$ ， $EA = TA$ ，

$\therefore \angle FAT = 90^\circ - \angle BAF - \angle TAD$ ，

$\because \angle EAB = \angle TAD$ ，

$\therefore \angle FAT = 90^\circ - \angle BAF - \angle TAD$ ，

$= 90^\circ - \angle BAF - \angle EAB$ ，

$= 90^\circ - \angle EAF$ ，

$= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

则在 $\triangle EAF$ 与 $\triangle TAF$ 中，

$$\begin{cases} EA = TA \\ \angle EAF = \angle TAF \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle TAF,$$

$$\therefore FT = FE \therefore FT = FD - TD, TD = EB,$$

$$\therefore EF = DF - BE.$$

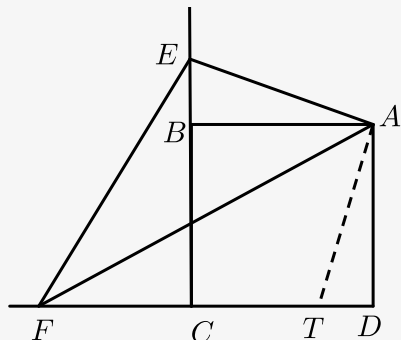


图2

(3) 如图, 将 $\triangle AEC$ 绕 A 顺时针旋转 90° , 使 AC 与 AB 重合, E 点落在 E' 处. 连 $E'D$

, 由旋转知, $E'B = EC = 6$, $E'A = EA$, $\angle ABE' = \angle ACE = 45^\circ$,

$$\angle E'AB = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle E'AB,$$

$$\therefore \angle E'AB + \angle BAD = \angle BAD + \angle EAC = 45^\circ,$$

在 $\triangle E'AD$ 与 $\triangle EAD$ 中,

$$\begin{cases} E'A = EA \\ \angle E'AD = \angle EAD \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle E'AD \cong \triangle EAD,$$

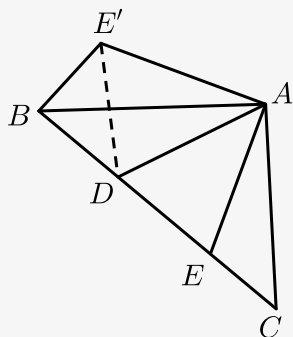
$$\therefore E'D = ED,$$

$$\therefore \angle E'BA = 45^\circ, \therefore \angle E'BD = \angle E'BA + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore E'B^2 + BD^2 = E'D^2,$$

$$\therefore BD^2 + EC^2 = ED^2,$$

$$\therefore ED = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}.$$



【标注】【知识点】正方形中的半角模型